## ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

**по дисциплине «Математика»**

**дата 29.11.23**

**Продолжаем конспект прошлого урока в рабочей тетради!!!**

### Метод парабол (метод Симпсона)

Если заменить график функции $y = f(x)$ на каждом отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ разбиения не отрезками прямых, как в методах трапеций и прямоугольников, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}))$$

Формула называется **формулой парабол (или Симпсона)**

### Решение задач

**<u>Задание</u>**

Вычислить $\int_1^9 \sqrt{6x-5}dx$ по формуле Ньютона – Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, разбивая интервал интегрирования на 8 равных частей. Оценить в процентах погрешность результатов, полученных по приближенным формулам.

**Решение:**

1. Вычислим по формуле Ньютона – Лейбница $I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

$$I = \int_1^9 \sqrt{6x-5}dx = \frac{1}{6}\int_1^9 (6x-5)^{\frac{1}{2}} d(6x-5) = \frac{1}{9}\cdot(6x-5)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{1}{9}\cdot\left[\sqrt{(6\cdot 9-5)^3} - \sqrt{(6\cdot 1-5)^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left[\sqrt{49^3} - \sqrt{1^3}\right] = \frac{1}{9}\cdot\left[49\sqrt{49} - 1\right] = \frac{1}{9}\cdot[49\cdot 7 - 1] = \frac{1}{9}\cdot(343-1) = \frac{1}{9}\cdot 342 = 38.$$

Делим интервал интегрирования $[1;9]$ на 8 равных частей длиной $h = \frac{9-1}{8} = \frac{8}{8} = 1$ точками

$x_0 = 1; x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 4; x_4 = 5; x_5 = 6; x_6 = 7; x_7 = 8; x_8 = 9$.

3. Вычислим значения подынтегральной функции

$y_k = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n):$

$y_0 = f(1) = \sqrt{1} = 1{,}0000$, $y_1 = f(2) = \sqrt{7} = 2{,}6458$, $y_2 = f(3) = \sqrt{13} = 3{,}6056$,
$y_3 = f(4) = \sqrt{19} = 4{,}3589$, $y_4 = f(5) = \sqrt{25} = 5$, $y_5 = f(6) = \sqrt{31} = 5{,}5678$,
$y_6 = f(7) = \sqrt{37} = 6{,}0828$, $y_7 = f(8) = \sqrt{43} = 6{,}5574$, $y_8 = f(9) = \sqrt{49} = 7{,}0000$.

4. Полученные значения занесем в таблицу

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_k$ | 1,0000 | 2,6458 | 3,6056 | 4,3589 | 5,0000 | 5,5678 | 6,0828 | 6,5574 | 7,0000 |

5. Вычислим данный интеграл по приближенным формулам:

1) *по первой формуле прямоугольников*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot (y_0 + y_1 + y_2 + \ldots y_{n-1})$$

$$I_h \approx \sum_{k=0}^{7} y_k = 1 \cdot (1{,}0000 + 2{,}6458 + 3{,}6056 + 4{,}3589 + 5{,}0000 + 5{,}5678 + 6{,}0828 +$$
$$+ 6{,}5574) = 34{,}8183.$$

Найдем абсолютную ошибку этого приближения (по недостатку)

$\Delta = |38 - 34{,}8183| = 3{,}1817$

и относительную (процентную) ошибку

$\delta = \dfrac{3{,}1817}{38} \cdot 100\% \approx 8{,}37\%$

2) *по второй формуле прямоугольников*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

$$I_h \approx \sum_{k=1}^{8} y_k = 1 \cdot (2{,}6458 + 3{,}6056 + 4{,}3589 + 5{,}0000 + 5{,}5678 + 6{,}0828 + 6{,}5574 +$$
$$+ 7{,}0000) = 40{,}8183.$$

Найдем для этого приближения абсолютную ошибку (по избытку)

$$\Delta = |38 - 40{,}8183| = 2{,}8183$$

и относительную ошибку

$\delta = \dfrac{2{,}8183}{38} \cdot 100\% \approx 7{,}42\%.$

3) *по формуле трапеций*

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot (\tfrac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}).$$

$$I_h \approx 1 \cdot (\frac{1{,}0000 + 7{,}0000}{2} + \sum_{k=1}^{7} y_k) = 4 + 2{,}6458 + 3{,}6056 + 4{,}3589 + 5{,}0000 + 5{,}5678 +$$

$$+ 6{,}0828 + 6{,}5574 = 37{,}8183\,.$$

Найдем абсолютную ошибку этого приближения $|R_n| = |I - I_h| = |38 - 37{,}8183| = 0{,}1817$

и относительную ошибку

$$\delta = \frac{0{,}1817}{38} \cdot 100\% \approx 0{,}48\%.$$

4) *по формуле Симпсона*

$$I_h = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})]$$

$$I_h \approx \frac{1}{3} \cdot (1{,}0000 + 7{,}0000) + 4 \cdot (2{,}6458 + 4{,}3589 + 5{,}5678 + 6{,}5574) + 2 \cdot (3{,}6056 +$$

$$+ 5{,}0000 + 6{,}0828) = \frac{1}{3} \cdot (8 + 4 \cdot 19{,}1299 + 2 \cdot 14{,}6884) \approx 37{,}9655\,.$$

Найдем абсолютную ошибку $\Delta = |38 - 37{,}9655| = 0{,}0345$ и относительную ошибку этого приближения

$$\delta = \frac{0{,}0345}{38} \cdot 100\% \approx 0{,}09\%.$$

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru